ソリトンの運動量，その他

戸　田　盛　和

1. 序論

ソリトンによって記述される体系の力学的，あるいは熱的な性質などをソリトンの運動論として気体分子運動論的な立場から理解するプログラムを提唱してきた。今回もこの立場からソリトンの圧力，ソリトンの衝突などを基本的に論じることにする。

2. 非線形格子のパラドックス的な膨張

1次元格子において最隣接格子間の相互作用が非線形項を含み

$$\phi(r)=\frac{\kappa}{2}r^2-\frac{\alpha}{3}r^3+\cdots \quad (\kappa>0,\ \alpha>0)$$

のときは，温度を上げると膨張する。これはポテンシァルの非対称性からも明らかである。

他方で $\alpha>0$ であるような格子のソリトンは圧縮（収縮）パルスである。指数格子

$$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar+\text{const.} \quad (a,b>0)$$

においては，$\kappa=ab$，$\alpha=ab^2/2>0$ である。 この格子の運動はソリトンの集まりとして記述できる（リップルの寄与は小さいだろう）と思われる。ソリトンは収縮を与えるのに，エネルギーを高めると格子が膨張するのはパラドックス的である（温度を上げなくても，たとえば cnoidal 波でも膨張する）。この膨張はソリトンによる圧力が原因であるにちがいないからこの圧力を考察しよう。

3. ソリトンの運動論と圧力（力積）

格子の応力は

$$f_n=-d\phi(r_n)/dr_n.$$

指数格子のソリトンは

$$f_n=\frac{m}{b}\beta^2\,\mathrm{sech}^2(\kappa n-\beta t),\quad \beta=\sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\kappa$$

で与えられる。ソリトンは圧縮のための質量

$$M=-m\sum_{n=-\infty}^{\infty}r_n=\frac{2m}{b}\kappa$$

をもち，速度

$$v=\beta/\kappa,$$

運動量は

$$p=\sum_{n=-\infty}^{\infty}m\dot{y}_n=\frac{2m}{b}\beta=Mv$$

であることが確かめられる。

格子の左端が固定され，これに右方からソリトンが入射して反射される過程を考えて固定端に加わる力積を求めよう。この過程は左右無限の格子で等しい強さのソリトンが正面衝突をする2・ソリトン系と同じで

$$f_n=\frac{m}{b}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\log\psi_n$$

$$\psi_n=\cosh 2\kappa\left(n-\frac{1}{2}\right)+C\cosh 2\beta t,\quad C=\cosh\kappa$$

で与えられる。固定端 $n=0$ の力は $f_0=f_1$。力積は

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}f_0\,\mathrm{d}t=\frac{m}{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\psi_0\Big|_{t=-\infty}^{\infty}=\frac{4m}{b}\beta=2p$$

すなわちソリトンの運動量の2倍である(弾性衝突なので運動量の2倍なのである)。

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}f_n\,\mathrm{d}t=I_0$$

も確かめられるが，これは入射，反射ソリトンによる運動量の流れが格子のどこでも同じことを反映している。

このように固定端で反射するときソリトンはこれに力積を与える。もしも左右両方に固定端があれば，左右で外向きの力積を与えるため，格子は膨張を生じることになる。

4. cnoidal 波による膨張

格子 cnoidal 波は外圧のないとき

$$f_n=\frac{m}{b}(2K\nu)^2\left[\mathrm{dn}^2\left\{2\left(\frac{n}{\lambda}-\nu t\right)K\right\}-\frac{E}{K}\right]$$

$$=\frac{m}{b}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}\beta^2\,\mathrm{sech}^2\{\kappa(n-\lambda l)-\beta t\}-2\beta\nu\right]$$

と書ける。ここで ν は λ のある関数，β は κ のある関数で，λ は κ と dn の母数の関数である。1周期にわたる平均は

$$\overline{\mathrm{dn}^2\,2K\nu t}=\nu\int_0^{1/\nu}\mathrm{dn}^2(2K\nu t)\,\mathrm{d}t=\frac{E}{K}$$

であり，$\overline{f_n}=0$。これは外圧がないことを意味する。上式の sech^2 はソリトンであって，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2\beta t\cdot\mathrm{d}t=2/\beta。$$

このソリトンが単位時間に ν 個通過するので，各点におけるソリトンによる圧力の時間平均は

$$\frac{m}{b}2\beta\nu$$

であり，これが上式の最終項と打ち消して $\overline{f_n}=0$ となる。すなわち上式の時間平均は

$$\overline{f_n}=\underbrace{\frac{m}{b}2\beta\nu}_{\text{ソリトンの圧力}}-\underbrace{\frac{m}{b}2\beta\nu}_{\text{伸びによる収縮力}}=0$$

一般に圧力 P を加えたとき，

$$a+P=a\,\mathrm{e}^{-br_0}$$

とし

$$f_n=a\,\mathrm{e}^{-br_0}(\mathrm{e}^{-b(r-r_0)}-1)+a(\mathrm{e}^{-br_0}-1)$$

この右辺第1項はソリトンによる応力，第2項は格子の伸びによる応力を意味するのであるがくわしいことは省略する。

5. ソリトンの相互作用（衝突）

ソリトン運動論ではソリトンの衝突を少し立ち入って考察する必要があるだろう。

(i) 2個のソリトンの正面衝突は厳密に

$$f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} f_n^{(1)} \\ f_n^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{m}{b}\, 2\beta^2 C \frac{\cosh[\,2\kappa(n-1/2) \mp 2\beta t\,] + C}{[\,\cosh 2\kappa(n-1/2) + C\cosh 2\beta t\,]^2}$$

と書ける。一般の2個のソリトンの正面衝突（$\kappa_1, \kappa_2 > 0$；$\beta_1 > 0$，$\beta_2 = -\widetilde{\beta}_2 < 0$）では

$$\psi_n = \frac{1}{2}\cosh\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}\cosh[\,(\kappa_1+\kappa_2)n - (\beta_1+\beta_2)t\,]$$

$$+\frac{1}{2}\cosh\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\cosh[\,(\kappa_1-\kappa_2)n - (\beta_1-\beta_2)t\,]$$

$$= \cosh\frac{\kappa_1}{2}\cosh\frac{\kappa_2}{2}\cosh(\kappa_1 n - \beta_1 t)\cosh(\kappa_2 n + \widetilde{\beta}_2 t)$$

$$-\sinh\frac{\kappa_1}{2}\sinh\frac{\kappa_2}{2}\sinh(\kappa_1 n - \beta_1 t)\sinh(\kappa_2 n + \widetilde{\beta}_2 t)$$

また追いつき衝突（κ_1, κ_2 同符号：β_1，β_2 同符号）では

$$\psi_n = \cosh\frac{\kappa_1}{2}\sinh\frac{\kappa_2}{2}\cosh(\kappa_1 n - \beta_1 t)\cosh(\kappa_2 n - \beta_2 t)$$

$$-\sinh\frac{\kappa_1}{2}\cosh\frac{\kappa_2}{2}\sinh(\kappa_1 n - \beta_1 t)\sinh(\kappa_2 n - \beta_2 t)$$

これらの場合も衝突中も厳密に2個のソリトンの運動を追って

$$f_n = f_n^{(1)} + f_2^{(2)}$$

とすることができる。たとえば追い越し衝突では

$$f_n^{(1)} = \frac{4a}{\psi_n^2}[\,(s_2^2 - s_1^2)\,c_1^2\, c_2^2\, s_2^2 \cosh^2 \gamma_1$$

$$-(c_1^2 - c_2^2)\,c_2^2\, s_1^2\, s_2^2 \sinh^2 \gamma_1\,]$$

$$f_n^{(2)} = \frac{4a}{\psi_n^2}[\,(s_2^2 - s_1^2)\,c_1^2\, c_2^2\, s_1^2 \sinh^2 \gamma_2$$

$$-(c_1^2-c_2^2)\,c_1^2\,s_1^2\,s_2^2\cosh^2\gamma_2]$$

ただし，

$$c_1=\cosh\frac{\kappa_1}{2} \qquad c_2=\cosh\frac{\kappa_2}{2}$$

$$s_1=\sinh\frac{\kappa_1}{2} \qquad s_2=\sinh\frac{\kappa_2}{2}$$

$$\gamma_1=\kappa_1 n-\beta_1 t \qquad \gamma_2=\kappa_2 n-\beta_2 t$$

である。このような追跡方法では衝突というよりも $f_n^{(1)}$ と $f_n^{(2)}$ はたがいに衝突相手の中を通過する過程と見なされる（詳細は省略）。

これは後の講演：米山徹『ソリトンの相互作用と連立方程式』（KdV 方程式）と同じ立場である。

これとはちがった見方もできる。

(ii) これはソリトンが剛体球の衝突のように運動量を交換する過程と見なす立場である。

$$\psi_n=\det B_n,\quad B_n=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$B_{11}=1+e^{-(2\kappa_1 n-2\beta_1 t)}$$

$$B_{22}=1+e^{-(2\kappa_2 n-2\beta_2 t)}$$

$$B_{12}=B_{21}=\sqrt{1-A}\;e^{-[(\kappa_1+\kappa_2)n-(\beta_1+\beta_2)t]}$$

ただし，

$$A=\left(\frac{\sinh\dfrac{\kappa_1-\kappa_2}{2}}{\sinh\dfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}}\right)^2$$

によって追い越し衝突を与えることができる。行列 B_n を対角化し

$$B^{(\pm)}=\frac{B_{11}+B_{22}}{2}\pm\sqrt{\frac{(B_{11}+B_{22})^2}{4}-(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}$$

これから（簡単のため $a=b=m=1$ とする）

$$f^{(+)}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\log B^{(+)},\quad f^{(-)}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\log B^{(-)}$$

とすれば厳密に

$$f_n=f_n^{(+)}+f_n^{(-)}$$

となり，２個のソリトン $f_n^{(+)}$ と $f_n^{(-)}$ の軌跡を追うことができる。

これを渡辺慎介氏に数値計算してもらい，衝突によって $f_n^{(+)}$ と $f_n^{(-)}$ が運動量を交換することが確かめられた．しかし衝突後の $f_n^{(+)}$ と $f_n^{(-)}$ は単純なソリトンに戻らなかった。これは行列 B_n の要素のとり方がよくなかったからかも知れない。行列式 $\det B_n$ を同じにする行列は無限にとり方があるので，適当なものをとれば衝突後も衝突前も $f_n^{(+)}$ と $f_n^{(-)}$ がソリトンとして現れるようにすることができるであろう。運動量を交換すると見る (ii) の立場の方がソリトン運動論には都合がよいであろう。この立場から格子の膨張を論じ，熱膨張を明らかにしたい。

この研究は上記の米山氏の講演と関係がある。また宗像豊哲氏の講演『固体の熱膨張とソリトン』もある。

6. ソリトンの正準運動量

ソリトンの速度を

$$v=\frac{\beta}{\kappa}=\frac{\partial E}{\partial p_{\mathrm{can}}}$$

で与える p_{can} は正準運動量である。これは

$$p_{\mathrm{can}}=\frac{4}{b}\sqrt{\frac{m a}{b}}\,(\kappa\cosh\kappa-\sinh\kappa)$$

で与えられる。正準運動量 p_{can} が直進運動量 $p=2m\beta/b$ と異なるのはソリトンの内部運動によるものであるが，内部運動は別の自由度ではない。なおソリトンのエネルギーは

$$E=\sum\frac{m}{2}\dot{y}_n^2+\sum_n\left[\frac{a}{b}(\mathrm{e}^{-br_n}-1)+a r_n\right]$$

$$=\frac{2a}{b}(\sinh\kappa\cosh\kappa-\kappa)$$

である。